A NOÇÃO DE ELEMENTO INVERSO: SUA SINTAXE E SUA SEMÂNTICA EM LINGUAGEM MATEMÁTICA

Sueli Cunha
Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ
sueli.cunha@ime.uerj.br

Jaime Velasco
Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ
jaimevelasco@ime.uerj.br

Resumo:
Muitas das dificuldades no aprendizado e no uso dos conceitos matemáticos se devem a uma incompreensão do que é dito, pois, via de regra, não se conhece a sintaxe da linguagem matemática. Assim, na alfabetização matemática, tão importante quanto desenvolver o raciocínio matemático é aprender a "ler" uma sentença matemática, possibilitando assim uma melhor "comunicação" entre professor e aluno. Em outros termos, conhecer a Gramática da linguagem matemática permite ao aluno compreender o que é dito pelo professor (e vice-versa), além de possibilitar, entre outros, i) a expressão, em linguagem matemática, do que se diz em linguagem natural; ii) a leitura, em linguagem natural, de uma sentença escrita em linguagem matemática. Desta forma, pode-se por exemplo perceber que notações "muito parecidas", na verdade, não são apenas "parecidas", mas estão relacionadas por uma semântica. Este artigo analisa o conceito de *elemento inverso* e sua representação em linguagem matemática em diversos contextos, buscando também identificar as condições para que um elemento admita inverso com respeito à operação (de natureza multiplicativa) considerada.

Palavras-chave: Alfabetização em linguagem matemática; Gramática da linguagem matemática; Elemento Inverso.

Introdução

O conceito de inverso está intrinsecamente ligado às operações binárias. Em um primeiro contato com a noção de inverso, normalmente se diz que "*o inverso de x é igual a $\frac{1}{x}$ e se representa por x^{-1}*". E registra-se (às vezes como propriedade) que $x \times \frac{1}{x} = 1$. Daí, surge a grande dúvida, principalmente pelos alunos de cálculo, sobre o significado da expressão $f^{-1}(x)$. "*Qual a diferença entre $f^{-1}(x)$ e $\left(f(x)\right)^{-1}$? Qual destas expressões é 'igual' a $\frac{1}{f(x)}$? E por quê?*". Apenas mais tarde, no estudo formal das estruturas algébricas, quando se enumeram as propriedades algébricas de uma operação binária, é dada a definição "formal" de elemento inverso e sua notação.

Este artigo apresenta a sintaxe e a semântica associadas ao conceito de *elemento inverso*. Assim, após rever o conceito de operação binária, suas naturezas e propriedades (entre elas, a de elemento inverso), são apresentados alguns exemplos de como identificar elemento inverso, relativo a algumas operações.

Operações binárias: suas naturezas e propriedades

Uma operação binária sobre um conjunto A, não vazio, é uma *lei de composição* interna que, a um par de elementos x e y de A, associa um elemento de A (D'AMBRÓSIO, 2011). Ela é *interna* pois só relaciona elementos do conjunto A; e é *binária* pois a composição de um elemento "depende" de dois elementos. Uma operação genérica pode ser representada, em linguagem matemática, por $x * y = z$, significando que z é o *resultado* da operação $*$ sobre os elementos x e y. Diz-se então que o conjunto A é munido da operação $*$; x e y são denominados *operandos*; e $*$, *operador*; z é normalmente denominado *resultado* da operação (ou composto de x e y, pela operação). As operações podem ser de *natureza aditiva* ou *multiplicativa*, que podem ser relacionadas à Teoria dos Campos Conceituais.

Vergnaud (*apud* SANTANA, 2012) identifica 6 categorias de *estruturas aditivas* em seu estudo sobre a Teoria dos Campos Conceituais; Magina et al (*apud* SANTANA, 2012), por sua vez, as classifica em 3 grupos *básicos*, a saber: *composição* (duas partes que compõem o todo), *transformação*[1] (passagem de um estado inicial a um estado final) e *comparação* (relação entre quantidades – "a mais", "a menos"), podendo-se encontrar situações de natureza *mista*, isto é, a combinação destes grupos básicos[2]. No Ensino Básico, o aluno entra em contato com duas das primeiras operações de natureza *aditiva*, que são a *adição* e a *subtração*. Por exemplo, em uma *composição* ("Os brinquedos de João são carrinhos e jogos"; logo, $brinquedos = carrinhos + jogos$), a *adição* permite determinar o "*todo*", dadas as suas "partes" ("João tem 6 carrinhos e 7 jogos; quantos brinquedos ele tem?" Resposta: $brinquedos\ = 6 + 7 = 13$). A *subtração*, por sua vez, permite determinar "*uma das partes*", se o "todo" e a outra "parte" são conhecidos ("João tem 13 brinquedos, dos quais 7 são jogos; quantos carrinhos ele tem?" Resposta: $carrinhos =\ 13 - 7 = 6$).

[1] Uma transformação pode ser positiva (acréscimo) ou negativa (perda).
[2] Santana (2012) conclui que os três grupos básicos, elencados por Magina et al, correspondem às três primeiras categorias apresentadas por Vergnaud; e as demais categorias, identificadas por Vergnaud, são vistas por Magina et al como problemas mistos.

Quanto às *estruturas multiplicativas*, elas podem ser classificadas em 4 categorias (VERGNAUD *apud* GITIRANA, 2014): *comparação multiplicativa* ("n vezes maior", "m vezes menor"); *proporção simples* ("um para muitos", "partição", "cota"); *produto cartesiano* ("configuração retangular" ou "tabela de dupla entrada", "combinação" com escolhas sucessivas dos elementos "componentes"; "árvore de decisão") e *proporção múltipla* ("combinação de proporções simples"). Novamente, no Ensino Básico, o aluno entra em contato com duas das primeiras operações de natureza *multiplicativa*, que são a *multiplicação* e a *divisão*. Por exemplo, na *comparação multiplicativa* ($Referido = Relação \times Referenciado$), "Uma *l*oja de um *S*hopping (ls) vende qualquer produto pelo *triplo* do valor cobrado na *l*ojinha da *e*squina (le)" (logo $ls = 3 \times le$), a *multiplicação* permite determinar o $Referido$, se a $Relação$ e o $Referenciado$ são conhecidos ("Uma sandália custa $R\$6{,}00$ na lojinha da esquina; quanto custa uma sandália do mesmo tipo na loja do Shopping?" Resposta: $ls = 3 \times 6{,}00 = 18{,}00$). A *divisão*, por sua vez, permite determinar, por exemplo, o $Referenciado$, se a $Relação$ e o $Referido$ são conhecidos ("A loja do Shopping vende uma bolsa por $R\$21{,}00$; quanto custa uma bolsa do mesmo tipo na lojinha da esquina?" Resposta: $le = 21{,}00 \div 3 = 7{,}00$).

Utilizando uma ou mais leis de composição (internas ou externas[3]) sobre um conjunto, podem ser formadas estruturas algébricas; uma estrutura algébrica é caracterizada pelas leis de composição que a definem e pelas propriedades que elas possuem (axiomas) (D'AMBRÓSIO, 2011).

Dentre as *propriedades* que uma operação binária interna pode apresentar em uma estrutura algébrica $(A, *)$ (isto é, o conjunto A, munido da operação $*$), apenas *três* são destacadas neste documento: a *comutatividade*, e as *existências dos elementos neutro* e *inverso*.

1. *comutatividade*: uma operação é dita comutativa, se é obtido o mesmo resultado, independentemente da ordem em que se consideram os operandos; em linguagem matemática, a propriedade comutativa é expressa por $x * y = z = y * x, \forall\, x, y \in A$. Por exemplo: a adição de inteiros é comutativa; já a diferença entre inteiros *não* é comutativa ($7 - 4 = 3$, mas $4 - 7 = -3$).
2. *existência do elemento neutro*: se existe um elemento no conjunto A (digamos e) que, operado com *qualquer outro elemento* (digamos x) de A resulta no próprio

[3] Leis de composição externas operam também com elementos de outro conjunto, mas elas estão fora o escopo deste documento.

elemento x, este elemento e é denominado *elemento neutro*[4] (isto é, não tem ação alguma sobre qualquer elemento do conjunto); em linguagem matemática, a propriedade do elemento neutro é expressa por $\exists\ e \in A \mid e * x = x * e = x, \forall\ x \in A$. Esse elemento, quando existe, é único. Por exemplo: 0 é o elemento neutro na adição de inteiros; do mesmo modo que 1, na multiplicação de inteiros; o conjunto vazio ($\emptyset$), na união de conjuntos; a matriz nula, na adição de matrizes.

Por outro lado, o elemento neutro de uma operação de natureza *aditiva* é denominado elemento *nulo* ou elemento *zero*. Por exemplo: 0, na adição de inteiros; o conjunto vazio ($\emptyset$), na união de conjuntos; a matriz nula, na adição de matrizes. O elemento neutro de uma operação de natureza *multiplicativa*, por sua vez, é denominado elemento *identidade* ou elemento *unidade* (ou mesmo *um*). Por exemplo: 1, na multiplicação de inteiros; $1 + 0i$, na multiplicação de números complexos; a matriz identidade, na multiplicação de matrizes; a função identidade, na composição de funções.

3. *elemento inverso*: se para um determinado elemento do conjunto (digamos x), existe um elemento específico (digamos x') tal que x operado com x' resulta *no* elemento neutro e, este elemento x' é dito elemento inverso do elemento x; em linguagem matemática, a propriedade do elemento inverso é expressa por $\forall\ x \in A,\ \exists\ x' \mid x * x' = x' * x = e$. Um elemento x com esta propriedade é dito elemento inversível[5] (ou invertível). Por outro lado, se para um dado x não existe um tal elemento, este x é dito elemento não inversível (ou não invertível). Por exemplo, na multiplicação nos inteiros, apenas 1 e -1 possuem elemento inverso; na adição nos números naturais, apenas 0 possui elemento inverso (que é o próprio 0).

   Em alguns casos, pode-se identificar uma condição para que um elemento do conjunto estudado seja inversível. Por exemplo, na multiplicação nos racionais, $\forall x$,

[4] Vale observar que, em operações não comutativas, é possível que existam elementos distintos $e \neq e'$ com $e * x = x, \forall\ x \in A$, e com $x * e' = x, \forall\ x \in A$; neste caso, e é dito o elemento neutro à esquerda, enquanto que e' é dito o elemento neutro à direita. Um exemplo é a multiplicação de matrizes (que não é comutativa); se $\mathcal{M}_{m\times n}$ é o conjunto das matrizes de ordem $m \times n$, o elemento neutro à esquerda da multiplicação de matrizes de $\mathcal{M}_{m\times n}$ é a matriz identidade de ordem m (isto é, I_m), enquanto que o elemento neutro à direita da multiplicação de matrizes de $\mathcal{M}_{m\times n}$ é a matriz identidade de ordem n (isto é, I_m).

[5] Da mesma forma que para o elemento neutro, em operações não comutativas é possível que existam elementos (distintos) inverso à esquerda e inverso à direita; e, se a operação é comutativa, cada elemento inversível x possui um único elemento inverso. É importante notar que, na maioria dos casos, se interessa em determinar *o* elemento inverso de um dado elemento, isto é, o *único elemento inverso* (ao mesmo tempo à direita *e* à esquerda).

$x \neq 0$, x é inversível; apenas as matrizes quadradas podem ser inversíveis e, neste caso, uma matriz M_n é inversível se seu determinante for diferente de 0; uma função bijetiva é inversível.

Determinação do elemento inverso

Uma vez que se tenha compreendido a noção de *inverso* e sua *sintaxe* na linguagem matemática, para determinar *o* elemento inverso (portanto único) de um dado elemento x, de um conjunto A munido de uma operação $*$, basta usar o conceito de inverso.

No entanto, há diversas nomenclaturas para elemento inverso, segundo a natureza da operação a ser analisada (*aditiva* ou *multiplicativa*). Podemos considerá-las sinônimas.

- *Elemento inverso aditivo*: também denominado elemento *simétrico* ou *oposto*. A nomenclatura é adequada, tendo em vista que os elementos inversos da adição no conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros (assim como em $\mathbb{Q}$ e em $\mathbb{R}$) estão *opostos* ou em *simetria* com relação à origem, na reta numerada; em linguagem matemática, inverso aditivo de x se escreve[6] $-x$.
- *Elemento inverso multiplicativo*: quando não há dúvida de que se trata de uma operação multiplicativa, é simplesmente chamado de *elemento inverso*. Em linguagem matemática, se escreve x^{-1} e, assim, "-1" é um *sufixo superior* que indica "*inverso de*" (CUNHA; VELASCO, 2019).

Em linhas gerais, *elemento inverso* é associado a uma operação de natureza *multiplicativa*, enquanto que *elemento simétrico* é associado a uma operação de natureza *aditiva*. E sempre que houver alguma margem de dúvida, se utiliza a nomenclatura "completa": *inverso aditivo* ou *inverso multiplicativo*.

Neste artigo, estamos principalmente interessados na sintaxe do *elemento inverso* (portanto de natureza *multiplicativa*). Em outros termos, estamos interessados na semântica de uma expressão $\square^{-1}$; isto é, dado um elemento x de um conjunto A, estamos interessados em identificar o elemento x^{-1}, deste conjunto, tal que $x^{-1} * x = x * x^{-1} = e$, onde $*$ é uma operação *multiplicativa* com $e \in A$ seu elemento neutro. Nesta busca, pode-se inclusive identificar a condição para que um elemento seja inversível, quando for o caso.

Desta forma, "*Qual o elemento inverso de ...?*"

1. *um inteiro* n, na multiplicação em $\mathbb{Z}$

   Considerando $n \in \mathbb{Z}$, $n \times n^{-1} = 1 \Rightarrow n^{-1} = 1 \div n$. Mas, em $\mathbb{Z}$, esta divisão só é

[6] Desta forma, "$-$" é um prefixo de negação, indicando "oposto de" (CUNHA; VELASCO, 2019).

possível se $n = 1$ ou $n = -1$. Sendo assim, em $\mathbb{Z}$, apenas 1 e -1 possuem inverso (1 e -1, respectivamente).

2. *um racional* x, na multiplicação em $\mathbb{Q}$ (ou um real x, na multiplicação em $\mathbb{R}$)

   Considerando $x \in \mathbb{Q}$ (ou $x \in \mathbb{R}$), $x \times x^{-1} = 1 \Rightarrow x^{-1} = 1 \div x$. Mas, em $\mathbb{Q}$ (ou em $\mathbb{R}$), esta divisão só é possível se $x \neq 0$. Sendo assim, tanto no conjunto dos racionais quanto no dos reais, todo número não nulo possui inverso, e seu valor é $\frac{1}{x}$.

3. *um número complexo* z, na multiplicação em $\mathbb{C}$

   Considerando $z \in \mathbb{C}$, se $z = a + bi$ e $z^{-1} = c + di$, então $z \times z^{-1} = 1 + 0i$. Assim,

   $$\begin{aligned}(a+bi)(c+di) = 1 + 0i \quad &\Rightarrow \quad ac + (ad)i + (bc)i + (bd)i^2 = 1 + 0i \\ &\Rightarrow \quad ac + (ad)i + (bc)i - bd = 1 + 0i \\ &\Rightarrow \quad (ac - bd) + (ad + bc)i = 1 + 0i\end{aligned}$$

   o que nos leva a resolver o sistema de equações lineares $\begin{cases} ac - bd = 1 \\ ad + bc = 0 \end{cases}$, cuja solução é $c = \frac{a}{a^2+b^2}$ e $d = \frac{-b}{a^2+b^2}$. Logo, $z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i$, ou equivalentemente, $z^{-1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$. Mas, este quociente só está bem definido se $a^2 + b^2$ for não nulo. E como esta expressão é uma soma de valores não negativos, ela só valeria 0, se $a = 0$ e $b = 0$, ou seja, se $z = 0$. Sendo assim, um número complexo possui inverso se, e somente se, ele é não nulo.

4. *uma matriz* M, em relação à multiplicação de matrizes reais[7]

   Como dito anteriormente, a multiplicação de matrizes não é comutativa. No entanto, para se identificar *o* elemento inverso de uma matriz $M_{m\times n}$ (isto é, uma matriz $M^{-1}_{p\times q}$), é necessário que os produtos $M \times M^{-1}$ e $M^{-1} \times M$ estejam bem definidos (isto é, $p = n$ e $q = m$) e sejam iguais (a uma matriz identidade de mesma ordem). Consequentemente, como $M \times M^{-1}$ e $M^{-1} \times M$ têm ordens $m \times m$ e $n \times n$, respectivamente, os valores m e n devem ser necessariamente iguais. Em outros termos, as matrizes M e M^{-1} devem ser quadradas e de mesma ordem, digamos n; conclui-se então que apenas as matrizes quadradas podem possuir elemento inverso. Observa-se ainda que a operação de multiplicação de matrizes é interna no conjunto das matrizes quadradas de ordem n (isto é, $\mathcal{M}_n$).

   Além disso, baseado no conceito de elemento inverso, dada uma matriz[8] quadrada $M \in \mathcal{M}_n$,

[7] Uma matriz é dita *real* quando suas entradas forem números reais.

[8] Em linguagem matemática, é possível não indicar a ordem (ou dimensão) de uma matriz, desde que ela já tenha sido citada, ou no caso em que as características da matriz referenciada no texto já tenham sido apresentadas, ou mesmo quando tal informação não seja relevante naquele contexto.

sua inversa $M^{-1} = \left(x_{ij}\right)_n$ verifica $M \times M^{-1} = I_n$. Essa operação determina n sistemas de equações lineares (cujos coeficientes são as entradas de M) de mesmo número n de equações e incógnitas. Portanto, determinar a inversa (caso exista) de uma matriz equivale a solucionar tais sistemas. Por sua vez, cada incógnita x_{ij} deve necessariamente verificar uma expressão[9] do tipo $det(M) \cdot x_{ij} = det(M_i)$ (DELGADO *et al*, 2013, p. 269), onde M_i é a matriz obtida a partir de M substituindo sua i-ésima coluna pela matriz dos termos independentes do sistema tratado. Assim, cada incógnita x_{ij} admite um valor único se, e somente se, o determinante de M é não nulo. Em suma, uma matriz admite inversa se, e somente se, for uma matriz quadrada, com determinante não nulo.

5. *uma função real*

Para analisarmos a noção de inverso no contexto de uma função real (isto é, uma *função de* ℝ *em* ℝ), devemos antes lembrar que há, pelo menos, duas operações sobre funções reais que são de natureza multiplicativa: a *multiplicação* e a *composição*. A seguir, são identificados *o* elemento inverso de um dado elemento, em cada uma dessas operações.

a) *Multiplicação de funções*: a definição da operação *multiplicação* sobre as funções é dada por (FLEMMING; GONÇALVES, 1992): $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$. Ora, f e g são funções reais; logo, suas imagens são números reais. Denominemos então $y = f(x)$ e $z = g(x)$, com $y \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{R}$. Assim, busca-se z tal que $yz = 1$; em outros termos, busca-se então identificar uma função g tal que $f(x) \cdot g(x) = 1$; isto é, busca-se *o inverso do número real* $y = f(x)$, representado em linguagem matemática por y^{-1} ou, equivalentemente, $\left(f(x)\right)^{-1}$. E, pelo item 2., determinar este valor só é possível se $f(x) \neq 0$, e $\left(f(x)\right)^{-1}$ vale $\frac{1}{f(x)}$. Desta forma, a função g é definida por $g(x) = \left(f(x)\right)^{-1}$. Do ponto de vista gramatical, sabendo que $(f \cdot g)(x) = 1$, e observando que a função constante $h(x) = 1$ é a função elemento neutro da operação *multiplicação de funções*, g poderia ser representada por f^{-1}, isto é, o *elemento inverso da função* f*, na operação multiplicação de funções.*

b) *Composição de funções*: a ideia básica dessa operação é a de aplicar uma função f nos pontos que sejam imagem de uma dada função g; em outros termos, se $f: B \to C$ e $g: A \to B$, a definição da operação de *composição sobre as funções* f e g é dada por $f \circ g: A \to C$, $f \circ g(x) = f\left(g(x)\right), \forall\, x \in A$. Vale observar que essa operação é interna apenas no

[9] Essa expressão é equivalente às determinadas pela Regra de Cramer.

conjunto das funções em que domínio e contradomínio são iguais. Considerando uma função $f: A \to A$, sua inversa $f^{-1}: A \to A$ é tal que $f\left(f^{-1}(x)\right) = f^{-1}\left(f(x)\right) = x, \forall\, x \in A$. Além disso, vale observar que, para que f^{-1} seja definida, f deve ser *necessariamente injetiva*, pois, caso contrário, $\exists\ x_1 \neq\ x_2 \mid f(x_1) =\ f(x_2) = y$, e não estaria bem definido o valor de $g(y)$. E f deve ser ainda *necessariamente sobrejetiva*, pois dado $x \in A$, considerando $y = f^{-1}(x) \in A$, temos que $f(y) = x$ (pois $f(y) = f\left(f^{-1}(x)\right) = x$). Logo, todo elemento de A é imagem por f de algum elemento de A. Consequentemente, sendo f injetiva e sobrejetiva, conclui-se que f é *bijetiva*.

Analisemos o caso de uma função f real (isto é, com domínio e imagem reais). Consideremos $f(x) = x + 3$*;* ao buscar y tal que $f(y) = x$, quer-se na verdade identificar o valor de y ("em função" de x; isto é, $y = g(x)$) na equação $y + 3 = x$ (visto que $f(y) = y + 3$); e, neste caso, $y = x - 3$; em outros termos, $y = g(x) = x - 3$. Desta forma, $(f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right) = f(x - 3) = (x - 3) + 3 = x$. Em termos gramaticais, tendo em vista que $(f \circ g)(x) = x$, e observando que a função identidade $I(x) = x$ é a função elemento neutro da operação *composição de funções*, g poderia ser representada por f^{-1}, isto é, o *elemento inverso da função f, na operação composição de funções.*

Desta forma, f^{-1} "*seria*" um termo polissêmico[10] da linguagem matemática, podendo significar o *elemento inverso da função f* tanto na operação multiplicação de funções, como na operação composição de funções. No entanto, a operação *multiplicação de funções* é definida apenas para funções cujo contradomínio é real (tendo em vista que a imagem da função produto corresponde ao produto das imagens das funções consideradas); além disso, a expressão de cálculo f^{-1} (isto é, o elemento inverso da função f), é bem determinada no contexto da operação multiplicação de funções, e equivale ao inverso do valor da imagem de um elemento x pela função f, qualquer que seja a função f (desde que a imagem de qualquer elemento de seu domínio seja não nulo). Em outros termos, $f^{-1}(x) =\ \left(f(x)\right)^{-1}$.

Por outro lado, *a operação composição de funções* não está restrita apenas às funções reais; ela pode ser definida em quaisquer outros conjuntos (domínio e contradomínio), desde que satisfaçam as condições descritas em b). Além disso, não há uma expressão genérica, em função de f, para indicar a expressão de cálculo de sua inversa. Isto pode justificar o uso

[10] Um termo (ou palavra) é *polissêmico* quando ele apresenta vários significados (mais do que um), sendo possível estabelecer uma relação entre eles (CORREIA, *apud* CUNHA; VELASCO, 2019).

“convencional” do termo f^{-1} para designar apenas a função inversa de f pela operação de *composição de funções reais*, a fim de evitar ambiguidades.

Essa distinção fica ainda mais clara quando se conhece a pontuação na sintaxe da linguagem matemática (feita por meio dos sinais gráficos (aos pares): “(” e “)”, “[” e “]”, ou ainda “{” e “}” (CUNHA; VELASCO, 2019). A pontuação permite, entre outras coisas, identificar a abrangência de um *sufixo* em uma expressão matemática. Em $f^{-1}(x)$, o sufixo “-1” está associado ao termo f (significando, portanto, “a imagem de x pela *inversa da função f*”), enquanto que em $\big(f(x)\big)^{-1}$, o sufixo “-1” está associado ao termo que se encontra entre parêntesis, como indica a pontuação da linguagem matemática (significando, neste caso, “o *inverso da imagem de x pela função f*”).

Estes são alguns exemplos de busca de elementos inversíveis em um dado conjunto, munido de uma dada operação. Existem muitos outros a estudar; não há pretensão, neste artigo, de estudá-los todos. O objetivo aqui é mostrar que identificar elementos inversíveis, utilizando o <u>conceito de inverso</u>, torna muito mais claras as condições para que um determinado elemento (de um determinado conjunto, munido de uma determinada operação) seja inversível, bem como facilita a determinação de expressão de seu valor.

Considerações Finais

A análise do sufixo superior “-1 (isto é, em palavras na forma “$\square^{-1}$”), apresentada neste artigo, busca mostrar que não é necessário “decorar” símbolos e regras, mas apenas compreender conceitos e sua representação em linguagem matemática. Não há mais necessidade de “decorar” a expressão do elemento inverso de um determinado elemento de um dado conjunto, em uma dada operação binária. Vimos que é possível, simplesmente com a compreensão do conceito de elemento inverso, não apenas identificar a expressão procurada, como também determinar quais elementos são inversíveis, sem necessidade de “decorar”. As restrições surgem “naturalmente” das operações necessárias para determinar o elemento que atende à definição de *elemento inverso* de um dado elemento. Vale ressaltar que, fazendo um paralelo com nosso idioma, pode-se compreender uma extensão de um sufixo ou uma “pequena diferença” de semântica, em alguns casos, como por exemplo o caso de imagem inversa ($f^{-1}(B')$) de uma função $f: A \to B$, em que $B' \subseteq B, B' = Im(f)$ (ou seja, B' é o conjunto das imagens dos elementos de A, por f), ou o caso de relação inversa (R^{-1}). Estas expressões não foram discutidas neste documento tendo em vista que, embora contenha o mesmo sufixo superior “-1”, seu significado não corresponde ao “elemento inverso relativo a uma operação de natureza multiplicativa”; trata-se apenas de uma extensão de seu significado.

Referências

CUNHA, Sueli; VELASCO, Jaime. **Introdução à Gramática da Linguagem Matemática**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2019.

D’AMBRÓSIO, Ubiratan. Álgebra Moderna e a Escola Secundária. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, Costa Rica, Año 6, n. 7, p. 233-241. Disponível em: http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/viewFile/6944/6630. Acesso em: 03 out. 2016.

DELGADO, Jorge *et al*. **Geometria Analítica**. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A:** funções, limite, derivação e integração. 5ª ed. São Paulo: Pearson, 1992.

GITIRANA, Verônica *et al*. **Repensando Multiplicação e Divisão:** contribuições da Teoria os Campos Conceituais. 1ª ed. São Paulo: PROEM, 2014.

MUNEM, Mustafa A.; FOULIS, David J. **Cálculo.** Vol.1. Rio de Janeiro: LTC, 1982.

SANTANA, Eurivalda Ribeiro dos Santos. **Adição e Subtração:** o suporte didático influencia a aprendizagem do estudante? Ilhéus: Editus, 2012.