PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: DESENVOLVIMENTO DE ATIVIDADES COM SEQUÊNCIAS RECURSIVAS

Adriana Jungbluth[1]
Rede Municipal de Ensino de Florianópolis
adriadrij@gmail.com

Silvana Leonora Lehmhuhl Teres[2]
Colégio de Aplicação da UFSC
silvanaeleonorateres@gmail.com

Resumo

Este relato apresenta um recorte de um conjunto de tarefas desenvolvidas por duas professoras-pesquisadoras com alunos de uma turma de 5º ano do Ensino Fundamental e as reflexões acerca do desenvolvimento de generalizações, produzidas por eles, a partir de padrões presentes em sequências recursivas. Foram utilizadas as transcrições de áudios e vídeos gravados no decorrer do desenvolvimento das atividades na sala de aula, os registros dos estudantes e as reflexões das professoras e autoras deste texto. As ações realizadas pelas professoras-pesquisadoras tiveram uma dimensão colaborativa ao longo do planejamento, desenvolvimento, registro e da sistematização das informações construídas na sala de aula. As tarefas desenvolvidas pelas professoras foram construídas e/ou selecionadas no contexto formativo do grupo de estudos ICEM[3], que focou no estudo do pensamento algébrico no ano de 2019. Concluímos que os alunos desenvolveram o pensamento algébrico, o que ficou demonstrado nas generalizações produzidas, com a criação de leis de formação, que permitem determinar um termo qualquer das sequências trabalhadas e que foram expressas com o uso da linguagem natural.

Palavras-chave: Pensamento algébrico; Generalização de padrões; Sequências recursivas.

1 Introdução

Este relato apresenta as vivências e reflexões de duas professoras-pesquisadoras, autoras deste texto, acerca de tarefas envolvendo o pensamento algébrico, trabalhadas com estudantes do 5.º ano do Ensino Fundamental, de uma escola pública municipal do estado de Santa Catarina. As tarefas foram desenvolvidas no mês de outubro de 2019. A sala de aula era composta por 30 alunos, na faixa etária de 10 a 11 anos.

[1]Mestra em Educação Científica e Tecnológica/ UFSC. Professora de Matemática e integrante do Grupo de Estudos Insubordinação Criativa em Educação Matemática- ICEM.

[2]Mestra em Educação. Doutoranda do PPGECT/UFSC. Professora de Matemática e integrante do Grupo de Estudos Insubordinação Criativa em Educação Matemática- ICEM.

[3]O Grupo de estudos ICEM – Insubordinação Criativa em Educação Matemática desenvolve suas atividades na Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) e é coordenado pelos professores e pesquisadores Regina Célia Grando e Everaldo Silveira.

Os estudos dos conteúdos associados ao desenvolvimento do pensamento algébrico e a elaboração das tarefas que fundamentaram as ações pedagógicas foram realizados em conjunto com os integrantes do grupo de estudos Insubordinação Criativa em Educação Matemática (ICEM), da Universidade Federal de Santa Catarina. O grupo de estudos ICEM é composto por professores e estudantes da pós-graduação da universidade e por futuros professores e professores que ensinam Matemática na Educação Básica e que se preocupam com a aprendizagem da disciplina, em especial, nos Anos Iniciais.

O trabalho ocorreu de forma colaborativa e envolveu o planejamento da sequência didática, a escolha dos recursos didáticos, a construção de materiais, o desenvolvimento das atividades junto aos alunos, o registro e as discussões trazidas neste texto. No desenvolvimento das tarefas, uma de nós conduzia o processo e a outra contribuía na mediação, tirando dúvidas e fazendo o registro das interações entre a professora e as crianças, por meio de vídeos e áudios usando o celular.

O desenvolvimento do pensamento algébrico está ligado à generalização. Nesse sentido, o objetivo foi trabalhar com sequências de modo que as crianças realizassem diversas generalizações. Neste texto trazemos um recorte de todo o trabalho que desenvolvemos e iremos focar em tarefas envolvendo padrões em sequências recursivas.

2 Pensamento algébrico

O tema pensamento algébrico tem despertado grande interesse desde que a Álgebra passou a ser uma das cinco unidades temáticas da Matemática para ser trabalhada com os alunos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, a partir da aprovação da nova Base Nacional Comum Curricular (BNCC), em dezembro de 2017. De acordo com a BNCC (2017), as ideias de regularidade e generalização de padrões, que podem ser trabalhados com o uso sequências recursivas devem estar presentes nos processos de ensino e de aprendizagem de Álgebra desde os Anos Iniciais. A BNCC não propõe o uso de letras para expressar regularidades e generalizações nessa fase escolar. Propõe o uso da linguagem natural para expressar generalizações (BRASIL, 2017). Mas o que é pensamento algébrico?

Blanton e Kaput (2005, p. 413) pontuam que o pensamento algébrico é um

> processo no qual os alunos generalizam ideias matemáticas de um conjunto particular de exemplos, estabelecem generalizações por meio do discurso de argumentação e expressam-nas, cada vez mais, em caminhos formais e apropriados a sua idade.

O desenvolvimento da generalização é um dos objetivos da Álgebra, e o trabalho com padrões contribui com esse processo, conforme Vale *et al*. (2011, p. 19): “em particular, o trabalho com padrões permite o desenvolvimento da capacidade de generalização”. Blanton e

Kaput (2011, p. 21) também apontam a mesma perspectiva: "é, assim, essencial conjecturar, generalizar e justificar".

Os padrões estão presentes em sequências recursivas, que são o foco desse relato de experiência. As sequências recursivas possuem uma relação recursiva, que permite estabelecer as mudanças de um termo para o próximo termo e, portanto, calcular termos próximos dentro de uma sequência. Segundo Van de Walle (2009, p. 300 a "descrição que diz como um padrão é modificado de um passo ao passo seguinte é conhecida como relação recursiva".

Stacey (1989), classifica as generalizações em próximas e distantes. Segundo a autora, a "generalização próxima" acontece, quando o aluno, diante da questão envolvendo padrões, a resolve, passo a passo, desenhando, contando ou usando o apoio de uma tabela, o que normalmente envolve relações recursivas. Já a "generalização distante" ocorre, quando o aluno consegue construir uma lei de formação, ou seja, uma regra que permita calcular qualquer termo da sequência. Vale *et al*. (2011) também relatam que as generalizações podem ser entendidas como próximas ou distantes.

Na sequência, procuramos relatar as generalizações produzidas pelos alunos no trabalho com as sequências recursivas, a forma como as atividades foram desenvolvidas e algumas transcrições de discussões dos alunos sobre a temática.

3 Relato da experiência e sua análise

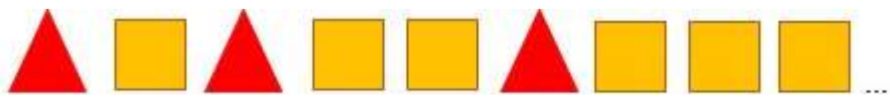
Introduzimos as sequências recursivas mostrando aos alunos que cada sequência possui um padrão e que ele é estabelecido por um segredo que faz a sequência aumentar ou diminuir. Esse segredo é a relação recursiva, mas achamos que seria melhor usar a palavra "segredo" para explicar aos alunos.

Começamos escrevendo sequências numéricas e os alunos foram dizendo o segredo: "mais três", "vezes dois" e "menos quatro":

- 2, 5, 8, 11, 14, 17, ... (exemplo de sequência numérica que aumenta somando 3);
- 3, 6, 12, 24, 48, ... (sequência que aumenta multiplicando por 2)
- 28, 24, 20, 16, 12, 8, 4, 0 (sequência que diminui 4 a cada número)

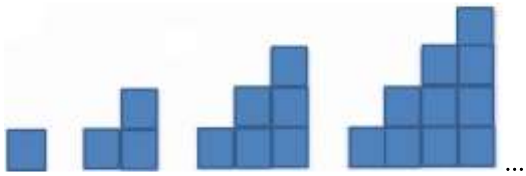
Depois montamos sequências recursivas pictóricas com recortes de EVA e os alunos foram falando as próximas figuras a serem coladas, de modo a continuar a sequência (Figuras 1 e 2):

Figura1- Sequência recursiva pictórica com relação recursiva +1



Fonte: Produção das autoras

Figura 2- Sequência recursiva pictórica com relação recursiva +2, +3, +4, +5, ...



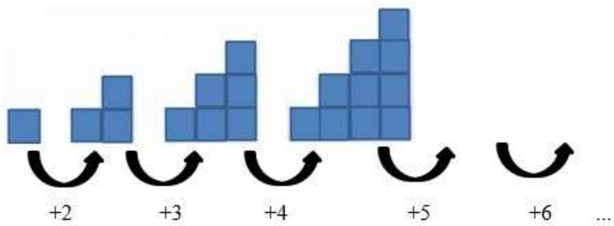
Fonte: Produção das autoras

Na figura 1 vai aumentando um quadrado amarelo depois de cada triângulo vermelho e na Figura 2 é possível observar diversas regularidades. Seguem as falas dos alunos sobre a segunda sequência:

Debora: *Eu percebi que de uma figura para a outra aumenta um embaixo e também aumenta pra cima.*
Maria: *Eu vi que aumenta em cada fileira. Deixa eu mostrar como é da terceira para a quarta figura: tinha 3 na primeira linha e depois passou pra quatro. Na segunda linha tinha 2 e passou pra 3. Na terceira linha tinha 1 e passou pra 2. A quarta linha não existia e agora tem 1.*
Professora: *Isso, vai aumentando 1 em cada linha e formando uma escada.*
Fernanda: *Sempre aumenta um na base, de uma figura pra outra.*
Professora: *E na altura também aumenta 1, de uma figura para a seguinte.O que mais dá para observar?*
Pedro: *E sempre aumenta um degrau da escada.*
Professora: *De uma figura para a próxima, quantos quadradinhos aumentam?*
Turma: *Aumenta 2, 3, 4, 5, 6, ...*

Os alunos foram falando juntos quantos quadradinhos aumentam de uma figura para a seguinte e isso foi registrado no quadro, conforme o esquema (Figura 3):

Figura 3- Esquema que mostra a relação recursiva da sequência

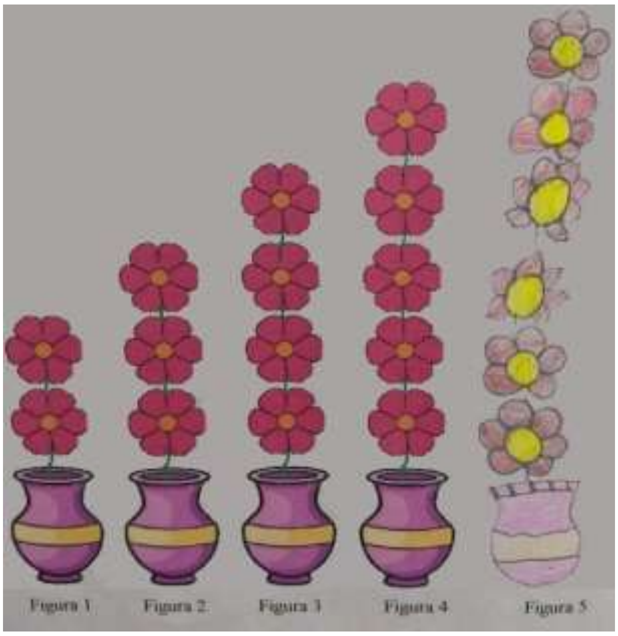


Fonte: Produção das autoras

Enfatizamos que as sequências desse tipo geralmente tem um padrão que cresce, mas que também pode diminuir, como é o caso de algumas sequências numéricas. E que todas essas sequências tem um segredo, que determina como isso ocorre.

Os alunos foram organizados em duplas e discutiram questões relacionadas a sequências. Iniciamos com uma sequência recursiva de flores, solicitando que observassem o padrão e que desenhassem o próximo termo (Figura 4):

Figura 4- Sequência recursiva pictórica com flores



Fonte: Arquivo das autoras

Nessa primeira sequência recursiva que elaboramos e aplicamos, usamos um padrão fácil de ser descoberto, para que os alunos se motivassem a descobrir termos próximos usando a relação recursiva (generalização próxima) e também uma regra que servisse para encontrar qualquer termo da sequência (generalização distante). Os alunos solucionaram as seguintes questões: a) Construa uma tabela registrando o número de ordem da figura e o número de flores em cada vaso. b) Quantas flores terá a figura 25? c) Quantas flores terá a figura 100? d) Explique como você descobriu.

Os alunos logo responderam as atividades e foi possível perceber que haviam entendido o padrão da sequência. Criaram uma lei de formação, de modo que fosse possível dizer quantas flores possui um termo qualquer da sequência. A aluna Fernanda foi logo explicando:

Fernanda: *Eu descobri logo que a figura 1 tem 2, a figura 2 tem 3. Sempre tem uma flor a mais que o número da figura.*
Professora: *Então a figura 100 tem quantas flores?*
Fernanda: *101.*
Professora: *Por que?*
Fernanda: *Porque sempre tem 1 flor a amais do que o número da figura.*

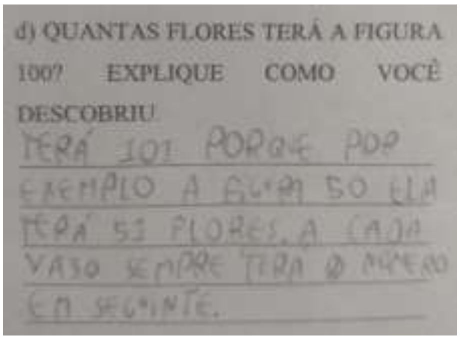
Percebemos que alguns alunos ainda estavam aprendendo a expressar essa regra descoberta (oralmente ou pela escrita), porém todos os alunos descobriram que a figura 100 tem 101 flores. Apresentamos a explicação de uma aluna na socialização da atividade:

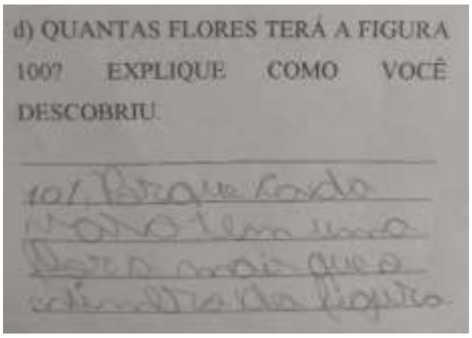
Vitória: *A figura 1 tem uma flor a mais, ela tem 2 flores. A figura 2 tem 3 flores. Então, a figura 100 tem 101 flores. Porque sempre tem 1 a mais.*

Professora: *Então, tem uma flor a mais que ...*
Vitória: *A mais que o número da figura.*

Na sequência apresentamos generalizações de duas duplas para o padrão da sequência de flores (Figura 5):

Figura 5- Generalizações de duas duplas para a sequência de flores



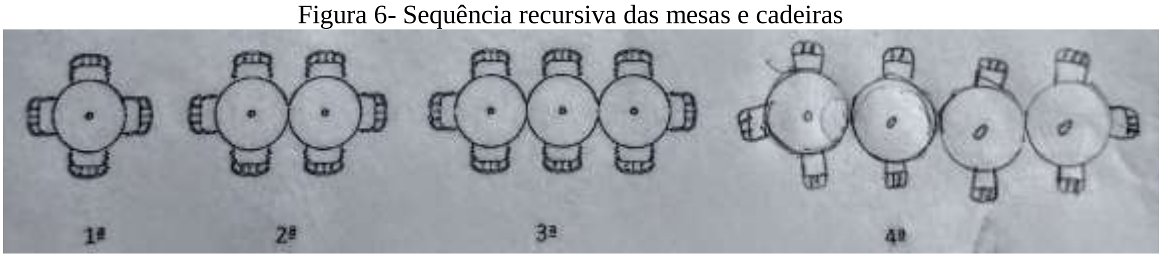


Fonte: Arquivo das autoras

É possível perceber que as generalizações das duas duplas constituem uma lei de formação, pois com a regra que escreveram é possível determinar o número de flores de qualquer figura da sequência (generalização distante).

A última sequência recursiva pictórica trabalhada com os alunos foi adaptada de Blanton *et al.* (2015), e envolve a junção de mesas em um restaurante: “Em um restaurante as mesas são organizadas conforme a quantidade de pessoas que chegam juntas para almoçar ou jantar. Se forem 4 pessoas, usam 1 mesa, se forem 6 pessoas, por exemplo, juntam 2 mesas, conforme a figura”. Os alunos leram inicialmente a introdução do problema. Em seguida, foi solicitado que observassem o padrão da sequência e desenhassem a 4.ª figura, que é possível visualizar na Figura 6.

Figura 6- Sequência recursiva das mesas e cadeiras



Fonte: Arquivo das autoras

Em seguida, foi solicitado que os alunos organizassem os dados em uma tabela, conforme a Figura 7:

Figura 7: Tabela para registro de dados

NÚMERO DA FIGURA	NÚMERO DE PESSOAS SENTADAS NAS MESAS
1	4
2	6
3	8
4	10
5	12

Fonte: Arquivo das autoras

Em todas as sequências recursivas usamos recomendações de autores como Van de Walle (2009) e Vale e Pimentel (2013) que falam da importância do registro na tabela. Os autores reiteram que a procura da consistência entre a representação figurativa e uma representação numérica organizada, como uma tabela, é muito importante para que os alunos produzam generalizações.

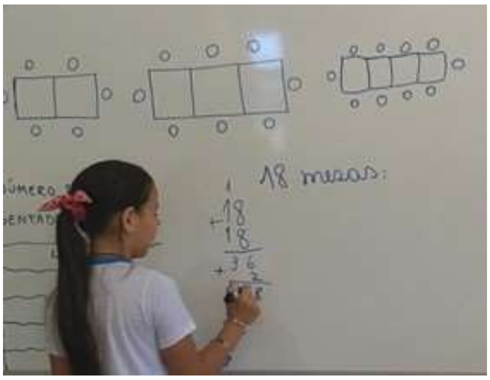
Na resolução dessa tarefa foi possível perceber que grande parte dos alunos usou a relação recursiva da sequência (+2), para encontrar o número de pessoas que sentam na quinta mesa, já que a sequência numérica correspondente é 4, 6, 8, 10, 12,... Acompanhando o trabalho dos alunos, foi solicitado que não realizassem o desenho ou a contagem de 2 em 2 (relação recursiva) para descobrir o número de pessoas que podem ocupar as 18 mesas, mas que descobrissem uma regra que permite calcular o número de pessoas que podem sentar, para qualquer número de mesas agrupadas. Os alunos foram desafiados a encontrar uma lei de formação para a sequência, com os seguintes questionamentos: No restaurante houve uma reserva para um grupo de pessoas. O restaurante juntou 18 mesas para acomodar o grupo todo, sem sobrar nenhum lugar. Quantas pessoas tem esse grupo? Existe uma regra que permite calcular o número de pessoas sentadas para qualquer número de mesas agrupadas? Explique.

Na socialização, a aluna Gabriela explicou como encontrou o número de pessoas que podem sentar em 18 mesas agrupadas e falou a regra que criou para determinar o número de pessoas que podem sentar, para qualquer número de mesas agrupadas:

Gabriela: *Eu fiz 18 + 18 e deu 36. Depois somei 2 e deu o resultado.*
Professora: *Por que somou 2?*
Gabriela: *Porque são as duas cadeiras das pontas.*
Professora: *Isso.*
Professora: *Turma, ao invés de fazer 18 + 18 poderia ser qual conta?*
Turma: *18 x 2.*
Professora: *Poderia ser 18 x 2 porque em cada mesa sentam 2 pessoas.*
Professora: *Gabriela, como você escreveu a regra? Se quiser pegar a folha para ler, não tem problema.*
Gabriela: *Temos que fazer duas vezes a quantidade de mesas e somar mais dois ao resultado da primeira conta.*

Na Figura 8 podemos visualizar a aluna Gabriela socializando sua resposta com a turma:

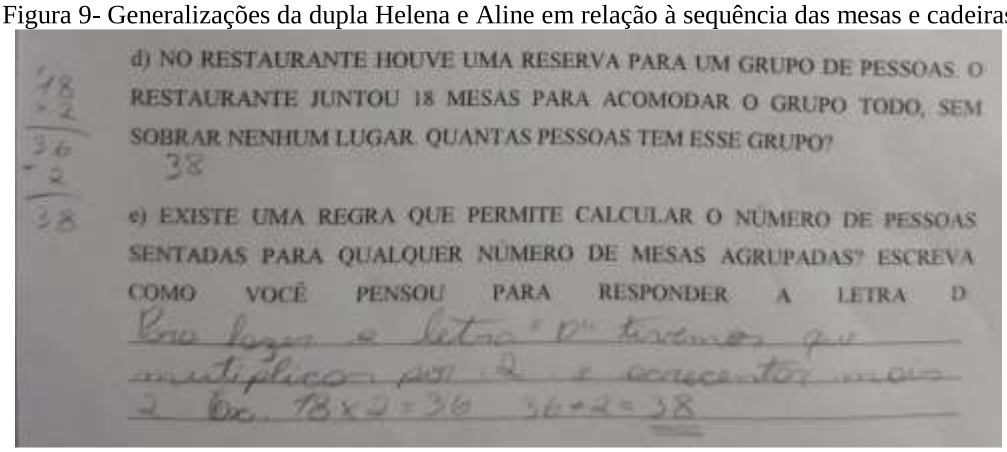
Figura 8- Aluna Gabriela explicando a generalização para a sequência das mesas e cadeiras



Fonte: Arquivo das autoras

Os alunos encontraram regras diferentes, porque é possível criar várias leis de formação para uma mesma sequência. A lei de formação que mais alunos da turma elaboraram diz que “o número de pessoas que podem sentar é igual ao dobro do número de mesas agrupadas mais as duas cadeiras das pontas”, conforme é possível visualizar nos recortes de generalizações de duas duplas dessa turma, que escreveram leis de formação semelhantes (Figuras 9 e 10).

Figura 9- Generalizações da dupla Helena e Aline em relação à sequência das mesas e cadeiras



d) NO RESTAURANTE HOUVE UMA RESERVA PARA UM GRUPO DE PESSOAS. O RESTAURANTE JUNTOU 18 MESAS PARA ACOMODAR O GRUPO TODO, SEM SOBRAR NENHUM LUGAR. QUANTAS PESSOAS TEM ESSE GRUPO?

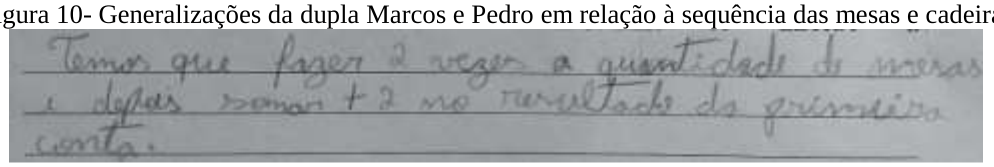
38

e) EXISTE UMA REGRA QUE PERMITE CALCULAR O NÚMERO DE PESSOAS SENTADAS PARA QUALQUER NÚMERO DE MESAS AGRUPADAS? ESCREVA COMO VOCÊ PENSOU PARA RESPONDER A LETRA D

$18 \times 2 = 36$ $36 + 2 = 38$

Fonte: Arquivo das autoras

Figura 10- Generalizações da dupla Marcos e Pedro em relação à sequência das mesas e cadeiras

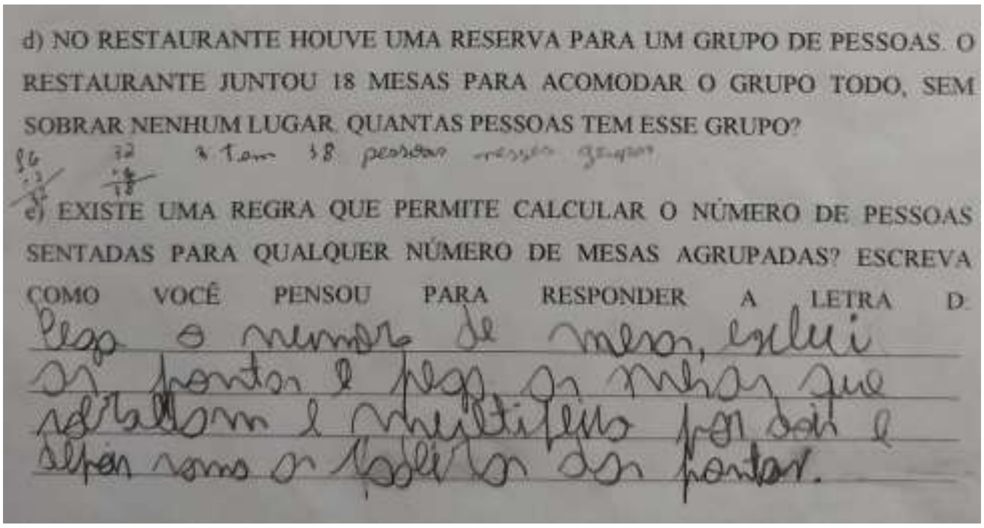


Temos que fazer 2 vezes a quantidade de mesas e depois somar + 2 no resultado da primeira conta.

Fonte: Arquivo das autoras

Outra dupla criou uma generalização que também permite calcular o número de pessoas sentadas para qualquer número de mesas agrupadas (Figura 11):

Figura 11- Generalização da dupla João e Luís em relação à sequência de mesas e cadeiras



d) NO RESTAURANTE HOUVE UMA RESERVA PARA UM GRUPO DE PESSOAS. O RESTAURANTE JUNTOU 18 MESAS PARA ACOMODAR O GRUPO TODO, SEM SOBRAR NENHUM LUGAR. QUANTAS PESSOAS TEM ESSE GRUPO?

16 32 R: Tem 38 pessoas nesse grupo

e) EXISTE UMA REGRA QUE PERMITE CALCULAR O NÚMERO DE PESSOAS SENTADAS PARA QUALQUER NÚMERO DE MESAS AGRUPADAS? ESCREVA COMO VOCÊ PENSOU PARA RESPONDER A LETRA D.

Pega o número de mesas, exclui as pontas e pega as mesas que sobraram e multiplica por dois e depois soma as cadeiras das pontas.

Fonte: Arquivo das autoras

A lei de formação da dupla consistia em diminuir 2 do número total de mesas e multiplicar por 2, para em seguida adicionar 6 ao resultado anterior. O 6 corresponde ao número total de cadeiras das pontas, que foram excluídas na primeira etapa. Nas palavras dos alunos: "Pega o número de mesas, exclui as pontas e pega as mesas que sobraram e multiplica por dois e depois soma as cadeiras das pontas". Na Figura 12 podemos visualizar um dos alunos da dupla fazendo a socialização para a turma:

Figura 12- Socialização de generalização para a sequência das mesas e cadeiras

Fonte: Arquivo das autoras

Para essa sequência de mesas e cadeiras, foi possível perceber que os alunos chegaram a leis de formação diferentes (generalização distante), que foram expressas na linguagem natural. Em relação à generalização distante, Vale *et al.* (2011, p. 28) destacam: "Há muitos modos diferentes que conduzem facilmente à descoberta da lei de formação para termos distantes", e ressaltam: "É importante que os alunos consigam perceber que diferentes modos de ver a figura conduzirão, eventualmente, a expressões diferentes (pois traduzem modos diferentes de ver) mas que são equivalentes" (VALE *et al.*, p. 29).

4 Considerações finais

Com as reflexões realizadas, percebemos que o trabalho para desenvolver o pensamento algébrico usando padrões em sequências recursivas, tornou o processo de aprendizagem significativo e valoroso. A generalização, considerada o cerne do pensamento algébrico (Blanton e Kaput, 2005, 2011) foi expressa pelas crianças em inúmeros momentos, alguns dos quais relatamos nesse texto.

Percebemos que os alunos do quinto ano compartilharam com muito orgulho as diversas generalizações realizadas, sejam elas próximas ou distantes, e assim, desenvolveram o pensamento algébrico. A generalização distante, que permite determinar um termo qualquer da sequência, com a criação de uma lei de formação, foi estimulada durante todo o processo.

Os alunos foram se apropriando de um reportório linguístico específico do campo da Álgebra, o que possibilitou a expressão do pensamento algébrico por meio de uma linguagem, construída por eles. Foi uma experiência muito gratificante, pois os alunos foram colaborativos e demonstraram bastante interesse pelas atividades. Os alunos manifestaram um grande envolvimento, uma vez que foram respeitados pelo conhecimento que produziram. Os alunos se sentiram desafiados e responderam muito bem aos desafios propostos.

5 Referências

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education,** Reston, v. 36, n. 5, p. 412-443, nov. 2005.

BLANTON, M.; KAPUT, J. Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. *In*: CAI, J.; KNUTH, E. (eds.). **Early algebraization.** A global dialogue from multiple perspectives. Berlin: Springer, p. 5-23, 2011.

BLANTON, M.; STEPHENS, A.; KNUTH, E.; GARDINER, A. M.; ISLER, I.; KIM, J.-S. The Development of Children's Algebraic Thinking: The Impact of a Comprehensive Early Algebra Intervention in Third Grade. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 46, n. 1, p. 39 – 87, 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. Governo Federal. **Base Nacional Curricular Comum:** BNCC**.** Versão para impressão. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf Acesso em: 18 jan. 2021.

STACEY, K. Finding and using patterns in linear generalizing problems. **Educational Studies in Mathematics,** n. 20, p. 47-164, 1989.

VALE, I.; BARBOSA, A.; FONSECA, L.; PIMENTEL, T., BORRALHO, A.; CABRITA, I.; BARBOSA, E. **Padrões em Matemática: uma proposta didática no âmbito do novo programa para o ensino básico.** Lisboa: Texto, 2011.

VALE, I.; PIMENTEL, T. O pensamento algébrico e a descoberta de padrões na formação de professores. **Da Investigação às Práticas**, v. 3, n. 2, p. 98-124, 2013.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no Ensino Fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula.** Tradução: Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.